第8講　数列

1　数列 $\{a_n\}$ は任意の自然数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} a_{n-k} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

を満たしているとする．このとき，$\sum_{n=1}^{m} na_n$ を求めよ．ただし，$m \geqq 3$ とする．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=2,\ a_2=0,\ a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2n-8\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義されているとする．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　a_n が最小となる n，およびその最小値 a_n を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　次の問いに答えよ.

(1)　任意の正の整数 n に対して，不等式 $(n+6)^2<2^{n+5}$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

(2)　$1+3+5+\cdots\cdots+(2k+1)=2^k+4$ を満たす正の整数 k を求めよ.

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　数列

1　数列 $\{a_n\}$ は任意の自然数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} a_{n-k} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \cdots\cdots①$$

を満たしているとする．このとき，$\sum_{n=1}^{m} na_n$を求めよ．ただし，$m \geqq 3$ とする．

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} a_{n-k} = 3^0 a_n + 3^{-1} a_{n-1} + 3^{-2} a_{n-2} + \cdots\cdots + 3^{-(n-2)} a_2 + 3^{-(n-1)} a_1 = \sum_{i=1}^{n} 3^{-n+i} a_i = 3^{-n} \sum_{i=1}^{n} 3^i a_i$$

よって，①より　$\sum_{i=1}^{n} 3^i a_i = \frac{3^n}{n(n+1)(n+2)}$　$\cdots\cdots①'$

①′で，$n=1$ のとき　$3^1 a_1 = \frac{3^1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$　よって　$a_1 = \frac{1}{6}$

$n \geqq 2$ のとき　①′$=S_n$ とおくと

$$S_n = 3a_1 + 3^2 a_2 + \cdots\cdots + 3^{n-1} a_{n-1} + 3^n a_n = \frac{3^n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$S_{n-1} = 3a_1 + 3^2 a_2 + \cdots\cdots + 3^{n-1} a_{n-1} = \frac{3^{n-1}}{(n-1)n(n+1)}$$

$(S_n - S_{n-1}) \div 3^n$ より　$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3(n-1)n(n+1)}$　これは $n=1$ では成り立たない．

$m \geqq 3$ のとき　$\sum_{n=1}^{m} na_n = 1 \cdot a_1 + \sum_{n=2}^{m} na_n = \frac{1}{6} + \sum_{n=2}^{m} \left\{ \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3(n-1)(n+1)} \right\}$

$$= \frac{1}{6} + \sum_{n=2}^{m} \left\{ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{m+2} \right) - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{m+2} + \frac{1}{6m} + \frac{1}{6(m+1)}$$

$$= \frac{3m(m+1)(m+2) - 12m(m+1) + 2(m+1)(m+2) + 2m(m+2)}{12m(m+1)(m+2)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3m^3 + m^2 + 4m + 4}{12m(m+1)(m+2)}}$$

2　数列 が $\{a_n\}$

$$a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2n - 8 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義されているとする．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　a_n が最小となる n，およびその最小値 a_n を求めよ．

(1)　$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2n - 8$　より　$(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = 2n - 8$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと　$b_{n+1} - b_n = 2n - 8$，$b_1 = a_2 - a_1 = -2$

よって　$n \geqq 2$　のとき　$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 8) = -2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - 8(n-1) = n^2 - 9n + 6$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$a_{n+1}-a_n=n^2-9n+6$　より　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-9k+6)=2+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-9\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)$$

$$=\frac{1}{3}n^3-5n^2+\frac{32}{3}n-4$$

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{3}n^3-5n^2+\frac{32}{3}n-4}$　$\left(=\frac{1}{3}(n-2)(n^2-13n+6)\right)$

(2)　a_n の階差数列 b_n について

$b_n<0$ となるのは　$n^2-9n+6<0$　より　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 8$

よって　$n=9,\ 10,\ \cdots\cdots$　のとき　$b_n>0$

したがって　a_n は　$n=9$ のとき最小となる．その最小値は　$a_9=\boldsymbol{-70}$

3　次の問いに答えよ．

(1)　任意の正の整数 n に対して，不等式　$(n+6)^2<2^{n+5}\cdots\cdots$①　が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

(2)　$1+3+5+\cdots\cdots+(2k+1)=2^k+4$　$\cdots\cdots$②　を満たす正の整数 k を求めよ．

---

(1)　[I]　$n=1$ のとき，①の左辺 $=7^2=49$　　①の右辺 $=2^6=64$　より　①は成り立つ．

[II] $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定する．つまり　$(k+6)^2<2^{k+5}$　が成り立つと仮定する．

$$2^{k+6}=2\cdot 2^{k+5}>2(k+6)^2$$

ここで　$2(k+6)^2-(k+7)^2=k^2+10k+23>0$　より　$(k+7)^2<2^{k+6}$

よって　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

[I][II] より　すべての自然数 n で①は成り立つ．

(2)　$1+3+5+\cdots\cdots+(2k+1)=\dfrac{(k+1)\{1+(2k+1)\}}{2}=(k+1)^2$ より　②は　$(k+1)^2=2^k+4$

ここで，①は　$\{(n+5)+1\}^2<2^{n+5}$ より　$n+5=k$ とおくと

$k\geqq 6$ のとき，$(k+1)^2<2^k$ が成り立つので，②を満たす k は存在しない．よって　$k\leqq 5$ である．

また，②の右辺は偶数より左辺も偶数．よって，$k+1$ が偶数，すなわち k が奇数に限られる．

$k=1$ のとき　②の左辺 $=2^2=4$　　②の右辺 $=2^1+4=6$　　よって不適

$k=3$ のとき　②の左辺 $=4^2=16$　　②の右辺 $=2^3+4=12$　　よって不適

$k=5$ のとき　②の左辺 $=6^2=36$　　②の右辺 $=2^5+4=36$

以上より　$\boldsymbol{k=5}$

1　$a_1=-15$，$a_{n+1}=a_n+3n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　初項 a_1 から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(3)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ と変化したとき，S_n が最小となる n の値と，そのときの S_n の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) $x \geqq 4$ を満たすすべての実数 x に対して，$x^3 > 3x^2 + x + 1$ が成り立つことを示せ.

(2) $m \geqq 10$ を満たすすべての自然数 m に対して，$2^m > m^3$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

東北大数学ⅠAⅡB　　第8講　数列　練習問題　解答

1　$a_1=-15$，$a_{n+1}=a_n+3n$　($n=1$，2，3，……) を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　初項 a_1 から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(3)　$n=1$，2，3，……と変化したとき，S_n が最小となる n の値と，そのときの S_n の値を求めよ．

解答例

(1)　$a_{n+1}=a_n+3n$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=3n$ である．

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=-15+\sum_{k=1}^{n-1}3k=-15+3\cdot\frac{(n-1)n}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-15$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=\frac{3}{2}(n^2-n-10)}$

(2)　$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k-10)=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)-10n\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-3(n+1)-60\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n^2-31)}$$

(3)　$a_n<0$ となるのは　$n^2-n-10<0$　つまり　$n(n-1)<10$ より　$n=1, 2, 3$

よって　$1\leqq n\leqq 3$ のとき　$a_n<0$　　$4\leqq n$ のとき　$a_n>0$

したがって，S_n が最小となる n は　$\boldsymbol{n=3}$

そのときの S_n の値は　$S_3=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(9-31)=\boldsymbol{-33}$

> S_n は a_n を順に加えたもの．正の項を加えれば増加し，負の項を加えれば減少する．
> n にすべての実数を許すと S_n は n の3次関数でありそのグラフの形状は増加 → 減少 → 増加となる．
> したがって，最小値は「極小値にもっとも近い点」であると予想できる。それは減少が止まる，すなわち a_n が負である最終項にほかならない．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1)　$x \geqq 4$ を満たすすべての実数 x に対して，$x^3 > 3x^2 + 3x + 1$ が成り立つことを示せ.
(2)　$m \geqq 10$ を満たすすべての自然数 m に対して，$2^m > m^3$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ.

解答例

今回は
$f'(x)$ を 0 にする x すなわち $x = 1 \pm \sqrt{2}$ が $x \geqq 4$ に含まれていないため左には記していない.
実際にはこのことを調べているので解答には現れていないが注意.

(1)　$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x-1)^2 - 6 \quad \text{より}$$

$x \geqq 4$ において，常に $f'(x) > 0$　つまり　$f(x)$ は単調増加.

また，$f(4) = 3 > 0$

よって　$x \geqq 4$ のすべての x で　$f(x) > 0$

ゆえに　この範囲で常に　$x^3 > 3x^2 + 3x + 1$　が成り立つ.

(2)　$2^m > m^3$　……(※)　について

［Ⅰ］　$m = 10$ のとき

(※)の左辺 $= 2^{10} = 1024$　　(※)の右辺 $= 10^3 = 1000$　　より(＊)は成り立つ.

［Ⅱ］　$m = k(\geqq 10)$ のとき（※）すなわち，$2^k > k^3$ が成り立つと仮定する.

このとき　$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^3$

ここで　$2k^3 - (k+1)^3 = k^3 - 3k^2 - 3k - 1 > 0$　((1)の結果より)　であるので

$2^{k+1} > (k+1)^3$

確実に利用できるように

よって　$n = k+1$ のときも（＊）が成り立つ.

［Ⅰ］［Ⅱ］より　$m \geqq 10$ を満たすすべての自然数 m で（＊）が成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。